Forme esatte e forme chiuse

Definizione 1 (Forme chiuse). *Diciamo che una k-forma α (di classe C^1) è <u>chiusa</u> se $d\alpha = 0$.*

Teorema 2 (Esatta $\Rightarrow$ chiusa per le 1-forme). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Allora la 1-forma differenziale df è chiusa.*

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso $n = 2$. Allora $f = f(x, y)$ e

$$df = \partial_x f(x, y)\, dx + \partial_y f(x, y)\, dy.$$

Allora

$$\begin{aligned} d(df) &= d\Big(\partial_x f(x, y)\, dx + \partial_y f(x, y)\, dy\Big) \\ &= d(\partial_x f) \wedge dx + d(\partial_y f) \wedge dy \\ &= \Big(\partial_{xx} f(x, y)\, dx + \partial_{yx} f(x, y)\, dy\Big) \wedge dx + \Big(\partial_{xy} f(x, y)\, dx + \partial_{yy} f(x, y)\, dy\Big) \wedge dy \\ &= \partial_{yx} f(x, y)\, dy \wedge dx + \partial_{xy} f(x, y)\, dx \wedge dy \\ &= \Big(-\partial_{yx} f(x, y) + \partial_{xy} f(x, y)\Big)\, dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Per il Teorema di Schwartz abbiamo che $\partial_{yx} f(x, y) = \partial_{xy} f(x, y)$ il che conclude la dimostrazione nel caso $n = 2$.

Dimostriamo ora il caso generale. Siano $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Allora

$$df = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x)\, dx_i.$$

Ora calcoliamo

$$\begin{aligned} d(df) = d\Big(\sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x)\, dx_i\Big) &= \sum_{i=1}^{n} d(\partial_i f) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(x)\, dx_j\right) \wedge dx_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(x)\, dx_j \wedge dx_i. \end{aligned}$$

Ora siccome $dx_i \wedge dx_i = 0$ possiamo scrivere

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(x)\, dx_j \wedge dx_i = \sum_{1 \le i < j \le n} \partial_j \partial_i f(x)\, dx_j \wedge dx_i + \sum_{1 \le j < i \le n} \partial_j \partial_i f(x)\, dx_j \wedge dx_i.$$

Nella soconda somma scambiamo le variabili i e j, cioè scriviamo i al posto di j e j al posto di i. Quindi

$$\sum_{1 \le j < i \le n} \partial_j \partial_i f(x)\, dx_j \wedge dx_i = \sum_{1 \le i < j \le n} \partial_i \partial_j f(x)\, dx_i \wedge dx_j.$$

Inoltre, siccome $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, abbiamo che

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \partial_i \partial_j f(x)\, dx_i \wedge dx_j = -\sum_{1 \le i < j \le n} \partial_i \partial_j f(x)\, dx_j \wedge dx_i.$$

In conclusione,

$$\begin{aligned} d(df) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(x)\, dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{1 \le i < j \le n} \partial_j \partial_i f(x)\, dx_j \wedge dx_i - \sum_{1 \le i < j \le n} \partial_i \partial_j f(x)\, dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{1 \le i < j \le n} \Big(\partial_j \partial_i f(x) - \partial_i \partial_j f(x)\Big)\, dx_j \wedge dx_i = 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo di nuovo usato il teorema di Schwartz. $\square$

Teorema 3 (Esatta $\Rightarrow$ chiusa)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia α una k-forma di classe C^2 su Ω. Allora la $(k+1)$-forma differenziale $d\alpha$ è chiusa.*

Proof. Dal teorema precedente, segue che se α è una 0-forma (quindi una funzione), allora la 1-forma $d\alpha$ è chiusa. Dimostreremo il teorema partendo da una 1-forma α in $\mathbb{R}^3$. Il caso generale (per una k-forma in $\mathbb{R}^n$) è analogo. Consideriamo quindi la 1-forma

$$\alpha = a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz.$$

Dimostreremo che la 2-forma $d\alpha$ è chiusa.

$$\begin{aligned}
d\alpha &= d\Big(a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz\Big)\\
&= da\wedge dx + db\wedge dy + dc\wedge dz\\
&= \Big(\partial_x a\,dx + \partial_y a\,dy + \partial_z a\,dz\Big)\wedge dx\\
&\qquad + \Big(\partial_x b\,dx + \partial_y b\,dy + \partial_z b\,dz\Big)\wedge dy\\
&\qquad\qquad + \Big(\partial_x c\,dx + \partial_y c\,dy + \partial_z c\,dz\Big)\wedge dz\\
&= \partial_y a\,dy\wedge dx + \partial_z a\,dz\wedge dx\\
&\qquad + \partial_x b\,dx\wedge dy + \partial_z b\,dz\wedge dy\\
&\qquad\qquad + \partial_x c\,dx\wedge dz + \partial_y c\,dy\wedge dz\\
&= \Big(\partial_x b - \partial_y a\Big)\,dx\wedge dy + \Big(\partial_z a - \partial_x c\Big)\,dz\wedge dx + \Big(\partial_y c - \partial_z b\Big)\,dy\wedge dz.
\end{aligned}$$

Ora, calcoliamo $d(d\alpha)$.

$$\begin{aligned}
d(d\alpha) &= d\Big(\big(\partial_x b - \partial_y a\big)\,dx\wedge dy + \big(\partial_z a - \partial_x c\big)\,dz\wedge dx + \big(\partial_y c - \partial_z b\big)\,dy\wedge dz\Big)\\
&= d\big(\partial_x b - \partial_y a\big)\wedge dx\wedge dy + d\big(\partial_z a - \partial_x c\big)\wedge dz\wedge dx + d\big(\partial_y c - \partial_z b\big)\wedge dy\wedge dz\\
&= \partial_z\big(\partial_x b - \partial_y a\big)dz\wedge dx\wedge dy + \partial_y\big(\partial_z a - \partial_x c\big)dy\wedge dz\wedge dx + \partial_x\big(\partial_y c - \partial_z b\big)dx\wedge dy\wedge dz.
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$dz\wedge dx\wedge dy = (dz\wedge dx)\wedge dy = (-dx\wedge dz)\wedge dy = -dx\wedge(dz\wedge dy) = -dx\wedge(-dy\wedge dz) = dx\wedge dy\wedge dz.$$

Nello stesso modo

$$dy\wedge dz\wedge dx = dx\wedge dy\wedge dz.$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
d(d\alpha) &= \partial_z\big(\partial_x b - \partial_y a\big)dx\wedge dy\wedge dz + \partial_y\big(\partial_z a - \partial_x c\big)dx\wedge dy\wedge dz + \partial_x\big(\partial_y c - \partial_z b\big)dx\wedge dy\wedge dz\\
&= \Big(\partial_{zx} b - \partial_{zy} a + \partial_{yz} a - \partial_{yx} c + \partial_{xy} c - \partial_{xz} b\Big)dx\wedge dy\wedge dz = 0.
\end{aligned}$$

□

Definizione 4 (Forme esatte)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $k \geq 1$. Diciamo che una k-forma α è <u>esatta</u> se esiste una $(k-1)$ forma β tale che $d\beta = \alpha$.*

Le forme esatte sono sempre forme chiuse (vedi Teorema 3), ma esistono forme chiuse che non sono esatte!

Esempio 5 (Chiusa non implica esatta)**.** *Sia $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e sia α la 1-forma (di classe C^∞ su Ω)*

$$\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Dimostrare che α è chiusa ma non esatta su Ω.

<u>Forme esatte e forme chiuse - esercizi</u>

Esercizio 6. *Sia $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e sia α la 1-forma (di classe C^∞ su Ω)*

$$\alpha = \frac{-y}{x^2+2y^2}dx + \frac{x}{x^2+2y^2}dy.$$

Dimostrare che α è chiusa ma non esatta su Ω.

Esercizio 7. *Sia* $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e sia* α *la* 1*-forma (di classe* C^∞ *su* Ω*)*

$$\alpha = \frac{-y}{(x^2+y^2)^a}dx + \frac{x}{(x^2+y^2)^a}dy.$$

(1) Dimostrare che α *non è esatta.*
(2) Per quali valori del parametro $a > 0$ *la forma risulta chiusa?*

Esercizio 8. *Sia* $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e sia* α *una* 1*-forma (di classe* C^∞ *su* Ω*).*

$$\alpha = \frac{-y^2x}{x^4+y^4}dx + \frac{x^2y}{x^4+y^4}dy.$$

Dire se α *è :*
(a) chiusa e esatta (in Ω*);*
(b) chiusa, ma non esatta (in Ω*);*
(c) esatta, ma non chiusa (in Ω*);* - **È possibile che una forma sia esatta, ma non chiusa?**
(d) ne chiusa, ne esatta (in Ω*).*

Esercizio 9. *Sia* $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e sia* α *una* 1*-forma (di classe* C^∞ *su* Ω*).*

$$\alpha = \frac{-y^2}{x^2+y^4}dx + \frac{xy}{x^2+y^4}dy.$$

Dire se α *è :*
(a) chiusa e esatta (in Ω*);*
(b) chiusa, ma non esatta (in Ω*);*
(c) esatta, ma non chiusa (in Ω*);*
(d) ne chiusa, ne esatta (in Ω*).*

Esercizio 10. *Sia* $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e sia* α *una* 1*-forma (di classe* C^∞ *su* Ω*).*

$$\alpha = \frac{-y^2}{x^2+y^4}dx + \frac{2xy}{x^2+y^4}dy.$$

Dire se α *è :*
(a) chiusa e esatta (in Ω*);*
(b) chiusa, ma non esatta (in Ω*);*
(c) esatta, ma non chiusa (in Ω*);*
(d) ne chiusa, ne esatta (in Ω*).*

Esercizio 11. *Sia* $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e sia* α *una* 1*-forma (di classe* C^∞ *su* Ω*).*

$$\alpha = \frac{-\sin y}{x^2+(\sin y)^2}dx + \frac{x\cos y}{x^2+(\sin y)^2}dy.$$

Dire se α *è :*
(a) chiusa e esatta (in Ω*);*
(b) chiusa, ma non esatta (in Ω*);*
(c) esatta, ma non chiusa (in Ω*);*
(d) ne chiusa, ne esatta (in Ω*).*

Esercizio 12. *Sia* $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e sia* α *una* 1*-forma (di classe* C^∞ *su* Ω*).*

$$\alpha = \frac{-\sin(2y)}{x^2+(\sin 2y)^2}dx + \frac{x\cos(2y)}{x^2+(\sin 2y)^2}dy.$$

Dire se α *è :*
(a) chiusa e esatta (in Ω*);*
(b) chiusa, ma non esatta (in Ω*);*
(c) esatta, ma non chiusa (in Ω*);*
(d) ne chiusa, ne esatta (in Ω*).*

Esercizio 13. *Supponiamo che la funzione* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(di classe* C^1*) sia tale che la* 1*-forma*

$$\alpha = x\,dx + a(x)\,dy$$

è esatta. Trovare la funzione a *e una funzione* f *tale che* $df = \alpha$*.*

Esercizio 14. *Sia $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Dire se la forma*
$$y\,dx + x^2 a(y)\,dy$$
è esatta su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 15. *Sia $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Dire se la forma*
$$y\,dx + x a(y)\,dy$$
è esatta su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 16. *Sia $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Dire se la forma*
$$xy\,dx + a(y)\,dy$$
è esatta su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 17. *Sia $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Dire se è possibile che la forma*
$$xy\,dx + a(x)\,dy$$
sia esatta su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 18. *Sia $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Dire se è possibile che la forma*
$$a(x)\,dx + a(y)\,dy$$
sia esatta su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 19. *Sia $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Dire se è possibile che la forma*
$$a(y)\,dx + a(x)\,dy$$
sia esatta su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 20. *Sia $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Dire se è possibile che la forma*
$$a(y)\,dx + a(xy)\,dy$$
sia esatta su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 21. *Sia $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Dire se è possibile che la forma*
$$a(x)\,dx + a(xy)\,dy$$
sia esatta su $\mathbb{R}^2$.

1-forme chiuse in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ – due formulazioni equivalenti

Osservazione 22 (1-forme chiuse in $\mathbb{R}^2$)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia α la 1-forma*
$$\alpha = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy\,.$$
Allora la forma α è chiusa se e solo se
$$\partial_y a = \partial_x b \quad \textit{in} \quad \Omega.$$

Osservazione 23 (1-forme chiuse in $\mathbb{R}^3$)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e sia α la 1-forma*
$$\alpha = a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz\,.$$
Allora la forma α è chiusa se e solo se
$$\partial_y a = \partial_x b\,, \quad \partial_z a = \partial_x c \quad \textit{e} \quad \partial_z b = \partial_y c \quad \textit{in} \quad \Omega.$$